Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 6

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung sind alle Resultate des Skriptes der Algebra II zulässig. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Notation
Sei ∞ ein gegenüber $\mathbb{Z}$ neues Element mit $n + \infty := \infty =: \infty + n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Definition
Sei K ein Körper.

(1) Eine surjektive Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist eine *diskrete Bewertung*, falls für alle $a, b \in K$

  (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$,

  (ii) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$ und

  (iii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

  erfüllt ist.

(2) Für eine diskrete Bewertung v ist der Unterring $R_v := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ von K der zugehörige *diskrete Bewertungsring.*

Aufgabe 6.1 **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei K ein Körper, $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ eine diskrete Bewertung, R_v der zugehörige Bewertungsring, $r \in R_v \backslash \{0\}$ und $t \in R_v$ erfülle $v(t) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass r genau dann eine Einheit in R_v ist, wenn $v(r) = 0$ gilt.

(b) Beweisen Sie die Existenz eines geeigneten $n \in \mathbb{N}_0$ und $u \in R_v^\times$ mit $r = ut^n$.

(c) Zeigen Sie, dass R_v ein ganz abgeschlossener Hauptidealbereich ist.

(d) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R_v.

Lösung:

Aufgabe 6.2 **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit einem eindeutigen maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ für ein geeignetes $t \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

(b) Beweisen Sie die Existenze eines eindeutigen nicht-trivialen Primideals von R.

Sei nun ferner $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R und $k \in K^\times$.

(a) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ und eines eindeutigen $u \in R^\times$ mit $k = ut^n$.

(b) Zeigen Sie, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Lösung:

Aufgabe 6.3 **[4 Punkte]**

Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R genau dann ein Dedekindring ist, wenn R noethersch ist und die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R als diskreter Bewertungsring aufgefasst werden kann.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von einem Integritätsbereich R die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen ist, dann auch R ganz abgeschlossen ist.

Lösung:

Aufgabe 6.4* **[1+1+1+1 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann lokal ist, wenn $R \backslash R^\times$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls R ein noetherscher Integritätsbereich ist, dann auch $S^{-1}R$ noethersch ist.

(c) Zeigen Sie, dass falls R ein Dedekindring ist, dann auch $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist.

(d) Erarbeiten Sie ein Beispiel für einen faktoriellen Ring der kein Dedekindring ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 10. Juni 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.